

气体静压轴承经保角变换的有限元数值解法

刁东风

摘要：本文阐述了一种研究气体静压轴承的新方法：射影变换下的有限元法。该方法的特点是可以将不同形式的、复杂的研究区域变为统一的、便于研究的区域。然后利用有限元数值解法针对后一种区域进行研究。这样，既能发挥复变函数的射影变换的特点又能吸取有限元数值解法的长处，是一种射影变换和有限元数值解法相结合的新方法。这种方法可以通过研究一种简单结构的轴承，进行适当的变换处理达到研究其它结构轴承的目的。因此，可以大量减少研究工作的重复性，提高工作效率。

一、前言

由于电子计算机的介入，使得气体润滑理论以及气浮轴承性能得到了更深一步的研究。研究气浮轴承中的气流也由原来的一维流变为二维流。这就更进一步地符合客观实际，从而为气浮轴承的设计提供了可靠的依据，为充分发挥气浮轴承的性能提供了可靠的保证。在利用计算机研究气浮轴承的方法中，近些年，比较成熟的方法是“有限元法”。该方法精度高，模拟性强。但是，在气体润滑领域里，用有限元数值解法去处理不同结构的气浮轴承时发现，改变一种结构的轴承，就得需要划分一次网格（有限单元），计算程序也得需要重新编制一次。我们知道，处理气体润滑的有限元程序是比较大的，而且调通一次相当困难，至少需要几个月时间，工作量相当大。因此，我们都在迫切地寻求一种数学处理方法，这种方法能够将各种结构类型轴承规划成为同一类型轴承；同时不同形式的数学模型相应转变为同一类型数学模型，然后专门针对这种同一类型数学模型（又称标准的数学模型）进行研究。这样，我们的程序将具有更大的通用性，且研究起来也很方便，经济效益也大。本文正是基于此目的写的。采用的数学处理方法：保角变换法。

二、标准数学模型及标准研究区域的建立

根据里曼定理的基本思想：任意一个单通区域必可通过某个保角变换变为另一个任意给定的单通区域。对我们来说，问题变为采用什么样的保角变换来把不同类型轴承变成同一类型，同时数学模型也相应地变成同一模型。在实际工作中我们常常遇到的气浮轴承的类型有：圆盘式止推轴承、球形轴承、圆柱形轴承、圆锥形轴承、矩形轴承等。考察这些轴承，不难看出：它们都是由圆球、柱、矩形、锥形或是它们的组合的几何图形组成的。下面，我们就把这些图形一一地变成矩形（这里我们定矩形为标准研究区域）。

1. 圆盘式止推轴承

图 1 是它的平面结构投影图。

描述图 1 这种结构的轴承方程式是：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(h^3 r \frac{\partial P^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial \theta} \right) + Q\delta_1 = 0 \quad (1)$$

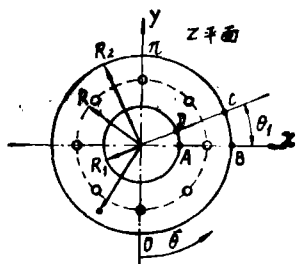


图 1

在 Z 平面上，我们取一块对称区域 $ABCD$ （在气体润滑里，该区域是气流的对称区域）。现在，我们把 Z 平面上的这块对称区域 $ABCD$ 变换到 H 平面上去。采用的变换是 $H = l_z Z$ ，即： $H = |l_z Z| + i \arg Z$ 。

$$H = l_z r + i\theta = \xi + i\theta \quad (2)$$

(2) 式告诉我们， Z 平面上的点变到 H 平面上去，辐角不变，模发生了变化。将 (2) 式代入

方程 (1) 得： $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial \theta} \right) + r^2 Q_1 \delta_1 = 0 \quad (3)$

Z 平面上的 $ABCD$ 在 H 平面变成矩形 $A'B'C'D'$ 。如图 2

注：变换后 Q 变为 Q_1 ，这一点后面再说明。

2. 球轴承

图 3 是它的结构简图。

它的润滑区域，可简化成图 4，描述它的方程是：

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \sin^2 \theta \frac{\partial P^2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial \varphi} \right) + r^2 Q\delta_1 = 0$$

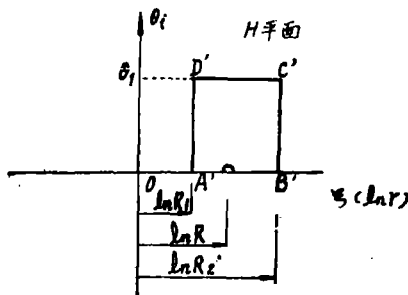


图 2

采用第一步保角变换 $\rho = \operatorname{tg} (\theta/2)$

则： $d\rho = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} d\theta$ ，

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}$$

从而： $\sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} = (2 \sin \theta/2 \cdot \cos \theta/2) \cdot$

$$\frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$$

代入方程 (2) 得：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho h^3 \frac{\partial P^2}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{P^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot r^2 Q_1 \delta_1 = 0 \quad (5)$$

再继续采用保角变换

$$\xi = \ln \rho$$

于是方程 (5) 变为：

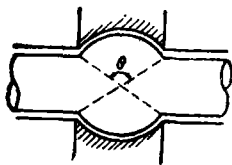


图 3

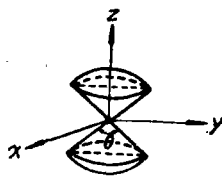


图 4

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial \varphi} \right) + \rho^2 \frac{1}{2} \cos^2(\theta/2) \cdot r^2 Q_2 \delta_1 = 0 \quad (6)$$

我们再来看一下润滑区域的变换情况，图 5

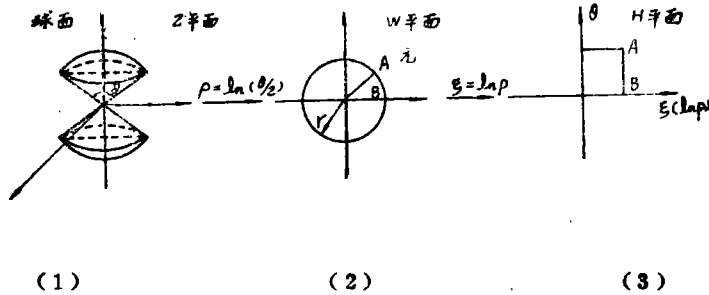


图 5

3. 圆柱形轴承可以直接展成矩形

矩形轴承本身的润滑区域就是矩形不必说，锥形轴承可以看成是由若干个圆柱形轴承组合而成。在此就不必详细说明了。

下面我们来解答：变换后流量源 Q 的变化情况。

观察方程(1)、(3)、(4)、(6)我们发现，单从变换的角度来看，变换后的“流量源”等于变换前“流量源”的 $\frac{1}{|\xi'(Z)|^2}$ 倍（这里的 $|\xi'(Z)|^2$ 是我们采用的保角变换的导数模的平方）下面我们来研究一下润滑区域变换后的情况。从图 6 图 7、在 Z 平面上给定一点，

ξ 平面上必有一点 $\xi = \xi(Z)$ 跟它相对应。这样，在 Z 平面上每给定一条曲线， ξ 平面必有一条对应的曲线。在相应的两条曲线上各截取相应的小段 $(Z, Z + \Delta Z)$ 和 $(\xi, \xi + \Delta \xi)$ 。这两小段的长度 $|\Delta \xi|$ 和 $|\Delta Z|$ 之比为

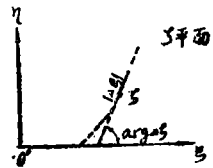
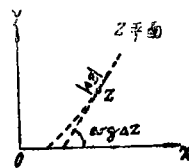


图 6

图 7

$$\frac{|\Delta \xi|}{|\Delta Z|} = \left| \frac{\Delta \xi}{\Delta Z} \right| \text{ 对批式取极限}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \xi}{\Delta Z} \right| = |\xi'(Z)| \quad (7)$$

这就是说，线段长度放大率是 $|\xi'(Z)|$

再看相应的小段曲线方向。 Z 平面上 $(Z + \Delta Z)$ 段与实轴夹角为 $\arg \Delta Z$ ，而 ξ 平面相应的段与实轴夹角为 $\arg \Delta \xi$ 两者相差 $\arg \Delta \xi - \arg \Delta Z = \arg \frac{\Delta \xi}{\Delta Z}$ 对该式取极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta \xi}{\Delta Z} = \arg \xi'(Z) \quad (8)$$

(8)式告诉我们，把 Z 点附近的小段曲线逆时针方向旋转角度 $\arg \xi'(Z)$ ，就得到在相应的点 ξ 附近的相应小段曲线的方向。如果在 Z 平面上有两条曲线相交于 A 点，从 Z 平面到 ξ 平面，两曲线都逆时针方向旋转 $\arg \xi'(Z)$ 。所以两曲线交角不变。交角不变性质告诉我们，任一微小几何图形必变成其相似形。

如图：8

$\triangle ABC$ 经变换 $\xi = \xi(Z)$ 变成 $\triangle A'B'C'$

$$\overline{A'B'} = |\xi'(Z)| \overline{AB}$$

$$\overline{A'C'} = |\xi'(Z)| \overline{AC}$$

$$\overline{B'C'} = |\xi'(Z)| \overline{B'C'}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'} = |\xi'(Z)|^2 \overline{AB} \cdot \overline{BC} = |\xi'(Z)|^2 \cdot S_{ABC} \quad (9)$$

(9)式告诉我们，变换后的微元体面积是变换前微元体面积的 $|\xi'(Z)|$ 倍。

综上所述，“流量源”变换后成为 $\frac{1}{|\xi'(Z)|^2} \cdot |\xi'(Z)|^2 Q = Q$ (10)

(10)式告诉我们，变换前后，“流量源”的强度不变。所以方程(3)、(6)左端最后一项分别为 $Q\delta_i$ 和 $r^2Q\delta_i$ ， r 是球的半径为常数、可以合并到 Q 中成为 Q_r 。至此，我们可以明确地写成标准数学模型为：

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial v} \right) + Q\delta_i = 0 \quad (11)$$

以后，我们只要研究方程(11)和矩形区域的轴承就可以了。现在简单来说明一下，保角变换不改变原方程解。首先我们在有限元网格中任取一个单元如图9。

当单元 $\triangle ij m$ 足够小时，我们可以认为在其上 h (气膜厚度) 为常量。于是方程(11)变为

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial v^2} = -\frac{Q\delta_i}{h^3} \quad (12)$$

当采用保角变换 $Z = Z(\xi)$ 时，我们可以推出：

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial y^2} = \frac{1}{|Z'(\xi)|^2} \cdot |Z'(\xi)|^2 \left(-\frac{Q\delta_i}{h^3} \right)$$

即： $\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial y^2} = -\frac{Q\delta_i}{h^3}$ (13)

所以变换前后方程的解是不会改变的。

三、矩形区域的有限元解法

1. 如图11所示，研究区域为矩形，采用三角网格，有斜线的为对称边没斜线的为大气边界。节点的编号取自上而下，先左后右，大气边界节点最后编排的方法进行。

2. 选形状函数，取泛函。

先取图11上每一节点的形状函数 $\phi_i(u_i, v_i)$ 满



图 8

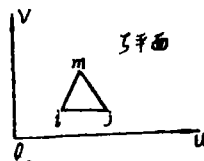


图 9

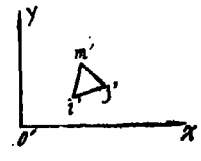


图 10

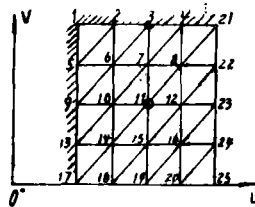


图11

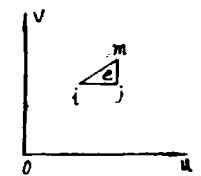


图 12

足:

$$\phi_i(u_i, v_i) = 1 \quad (14)$$

$$\phi_i(u_j, v_j) = 0 \quad (j \neq i)$$

$$\text{且 } \xi(u, v) = \sum_i^N \xi_i \phi_i(u, v) \quad (15)$$

其中 N 为总的节点数。 ξ_i 为 $\xi(u_i, v_i)$,即在节点 i 处的 ξ 值。下面我们求 ξ_i 所满足的方程组。它可以用变分原理求得。求解方程(11):

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(h^3 \frac{\partial P^2}{\partial v} \right) + Q\delta_i = 0$$

等价于求解泛函 $F(P^2)$ 取极小值的 $P^2(u, v)$ 如果我们令 $\xi = P^2(u, v)$, 则关于 ξ 的泛函是:

$$F(\xi) = \iint_R \left\{ h^3 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 \right] - 2Q\xi\delta_i \right\} dudv \quad (16)$$

将(15)式代入(16), 泛函变成节点函数值 ξ_i 的函数 $F(\xi_i)$ 即:

$$F(\xi_i) = \iint_R \left\{ h^3 \left[\left(\sum_j^N \xi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \right)^2 + \left(\sum_j^N \xi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \right)^2 \right] - \sum_j^N 2\xi_j Q\delta_i \right\} dudv \quad (17)$$

根据多元函数极值原理, ξ_i 满足

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (18)$$

这是线性方程组

$$AF = B \quad (19)$$

$$\text{其中 } F = \begin{pmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \\ \vdots \\ P_N^2 \end{pmatrix}$$

$$[A]_{ij} = \sum_j \iint h^3 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial u} + \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \right) dudv \quad (20)$$

$$[B]_i = \sum_j \iint Q dudv \delta_i$$

如果我们选形状函数:

$$\phi_i(u, v) = a_i + b_i u + c_i v \quad (21)$$

其中系数 a_i, b_i, c_i 待定, 按式(2-14)它也应满足

$$\begin{cases} \phi_i(u_i, v_i) = 1 \\ \phi_i(u_j, v_j) = 0 \\ \phi_i(u_m, v_m) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

i, j, m 分别为三角形单元三节点。

于是可得:
$$\begin{cases} a_i + b_i u_i + c_i v_i = 1 \\ a_i + b_i u_j + c_i v_j = 0 \\ a_i + b_i u_m + c_i v_m = 0 \end{cases} \quad (23)$$

解此方程组得:

$$a_i = (u_j v_m - u_m v_j) / 2\Delta$$

$$b_i = (v_j - v_m) / 2\Delta \quad (24)$$

$$c_i = (u_m - u_j) / 2\Delta$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & u_i & v_i \\ 1 & u_j & v_j \\ 1 & u_m & v_m \end{vmatrix} \quad (25)$$

Δ 是三角形面积如图12所示*i*→*j*→*m*→*i*轮换可得*a_i*, *b_i*, *c_i*, *a_m*, *b_m*, *c_m*.

将(21)(24)(25)全部代入(20)有

$$[A]_{ij} = \sum_i \iint h^3 (c_i c^{*T} + b_i b^{*T}) \frac{1}{(2\Delta)^2} dudv \quad (26)$$

$$c^{*T} = (c_i, c_j, c_m), b^{*T} = (b_i, b_j, b_m)$$

$$[B]_{ij} = \sum_i \iint 12 \eta \rho \frac{P_*}{\rho_*} \frac{1}{v} dudv = 12\eta \frac{P_*}{\rho_*} \sum_i \iint \rho \frac{1}{v} dudv$$

$$= 12 \eta \frac{P_*}{\rho_*} \sum_i m_{*i} = 12\eta \frac{P_*}{\rho_*} m_* \quad (27)$$

其中: η 为气体粘性系数

P_* 为边界压力 (大气压)

ρ_* 为大气密度

N_i 为含*i*节点的节流孔单元数

$$m_{*i} = \iint \rho \frac{1}{v} dudv$$

$$m_* = \sum_i m_{*i}$$

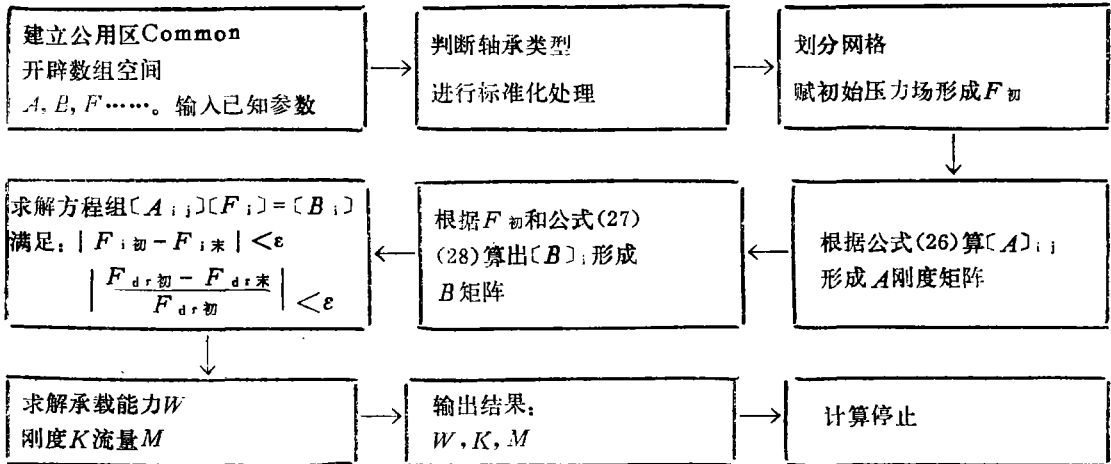
根据文献⁽¹⁾:

$$m_* = AP_* \phi \sqrt{\frac{2\rho_*}{P_*}} \psi$$

$$\psi = \begin{cases} \left[K/2 \cdot \left(\frac{2}{K+1} \right)^{(K+1)/(K-1)} \right]^{1/2} & \text{当 } P/P_* \leq 0.528 \\ \left\{ \frac{K}{K-1} \left[(P/P_*)^{2/K} - (P/P_*)^{(K+1)/K} \right] \right\} & \text{当 } P/P_* > 0.528 \end{cases} \quad (28)$$

对于空气而言 $\phi = 0.8$, $K = 1.4$ 为常数。

四、有限元程序流程图



五、计算结果

根据上述思想及有限元程序框图，笔者在IBM-PC/XT 计算机上编成了有限元程序通用模块，现将圆柱形轴承部分计算结果绘图如下：

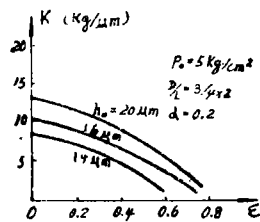


图13 刚度与相对偏心率关系

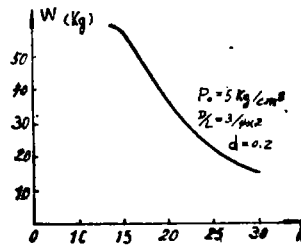


图14 承载能力与间隙关系

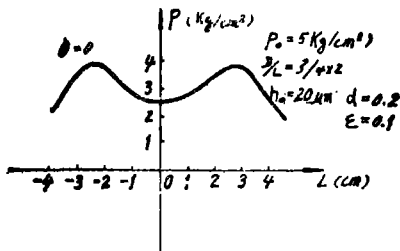


图15 轴承沿长度方向的压力分布 (参考图17)

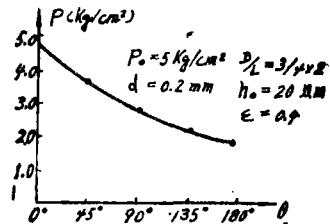


图16 颈向轴承沿围向的压力分布

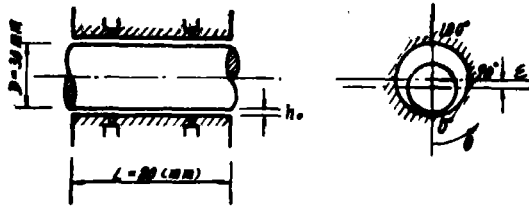


图17 圆柱形轴承结构简图

六、结束语

通过上面的分析和计算,结果表明:保角变换和有限元相结合是研究气体润滑比较有效的方法。尤其是在程序的编制上具有更大的通用性。此外,它还可以简化问题的分析。由于笔者水平有限,论文中可能有不当之处望批评指正。

本文,在刘承烈导师的关心和指导下,郭德申老师的帮助下完成的,在此表示衷心地感谢。

参 考 文 献

- [1] 杨绍祺、谈根林, 稀疏矩阵, 高等教育出版社, 1985年.
- [2] 西安交大高等数学教研室, 复变函数, 人民教育出版社, 1980年.
- [3] 梁昆淼, 物理方程, 人民教育出版社, 1978年.

The Externally Pressurized Simple-Orifice Gas Bearing the Transformed and Finite Element Method

Diao Dongfeng

Abstract

In this paper a new method, the transformation and finite element method for studying the externally is presented. By this method those complicatedly shaped domains to deal with can be transformed into a simple and united domain, so that the finite element numerical method can be easily used. It is the advantage of this method that results obtained from studying one simple bearing construction can be transformed into the results for many other different constructions. As a result the research works can be simplified and more efficient.